Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Preddiplomski studij matematike

Karla Mercvajler

Kroneckerov produkt i operator vektorizacije

Završni rad

Osijek, 2018.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Preddiplomski studij matematike

Karla Mercvajler

Kroneckerov produkt i operator vektorizacije

Završni rad

Mentor: doc.dr.sc. Suzana Miodragović

Osijek, 2018.

Kroneckerov produkt i operator vektorizacije

Sažetak

U ovome radu definirati ćemo Kroneckerov produkt te navesti i dokazati njegova osnovna svojstva. Uspostaviti ćemo vezu između svojstvenih vrijednosti dviju matrica i svojstvenih vrijednosti njihovog Kroneckerovog produkta, te ćemo to primijeniti u dokazivanju svojstava za determinatnu i trag. Uvest ćemo pojam Kroneckerove sume te odrediti njezine svojstvene vrijednosti. Nadalje, baviti ćemo se operatorom vektorizacije i vidjeti njegovu povezanost sa Kroneckerovim produktom. Za kraj ćemo primjeniti Kroneckerov produkt i operator vektorizacije na rješavanje Sylvesterove i Lyapunove matrične jednadžbe.

Ključne riječi: Kroneckerov produkt, svojstvene vrijednosti, Kroneckerova suma, operator vektorizacije, Sylvesterova jednadžba, Lyapunova jednadžba

The Kronecker product and vec-operator

Abstract

In this paper we will define the Kronecker product, as well as specify and prove his properties. We will establish the relation between the eigenvalues of two matrices and their Kronecker product and apply it in order to prove the properties for the determinant and the trace. We will introduce the concept of the Kronecker sum and determine its eigenvalues. Furthermore, we will define the vec-operator and look at his connection with the Kronecker product. We conclude with their application to solving Sylvester and Lyapunov equations.

Keywords: Kronecker product, eigenvalues, Kronecker sum, vec-operator, Sylvester equation, Lyapunov equation

Sadržaj

1 Uvod

Kroneckerov produkt dviju matrica se istražuje od 19. stoljeća. Upravo tada je otkriveno puno svojstava o njegovom tragu, determinanti i svojstvenim vrijednostima. Nazvan je po njemačkom matematičaru Leopold Kronecker, ali ovu operaciju definiranu simbolom $\otimes$ je prvu upotrijebio Johann Georg Zehfuss 1858. godine. Od tada je nazvana raznim imenima, uključujući Zehfussov produkt, tenzorov produkt te na kraju Kroneckerov produkt. Pokazalo se da je Kroneckerov produkt jako koristan u raznim područjima matematike kao što je linearna algebra, također ima veliku primjenu u teoriji sustava, matričnom računu, te se pokazuje kao učinkovit način gledanja na brze linearne transformacije.

Zanimljiva prednost Kroneckerovog produkta u odnosu na konvencionalno matrično množenje je ta što matrice ne moraju biti ulančane. Dakle, to je operacija dviju matrica proizvoljnih dimenzija koja za rezultat daje blok matricu. To ćemo vidjeti u Poglavlju 2 gdje definiramo i proučavamo svojstva vezana uz tu operaciju. U Poglavlju 3 ćemo definirati operator vektorizacije, te ćemo navesti i dokazati neke rezultate vezane za njega. On se često koristi zajedno sa Kroneckerovim produktom da bi se matrične jednadžbe izrazile kao sustav jednadžbi. Sylvester je još 1884.godine referirao na ovu ideju stavljanja elemenata matrice u vektor, a koristio ju je sa linearnim jednadžbama. 1934.godine W.E.Roth je izveo rezultat za korištenje ove operacije na matričnom produktu. Taj rezultat ćemo vidjeti u ovom poglavlju. Na kraju rada, u Poglavlju 4, navesti ćemo neke osnovne ideje za primjenu Kroneckerova produkta i operatora vektorizacije na rješavanje linearnih matričnih jednadžbi.

2 Kroneckerov produkt

Kroneckerov produkt se definira za dvije matrice proizvoljne veličine nad bilo kojim prstenom. U ovom radu ćemo se baviti realnim i kompleksnim matricama. Sa $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ označavamo skup svih matrica reda $m \times n$ s koeficijentima iz polja $\mathbb{F}$, gdje je $\mathbb{F}$ polje $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$. U slučaju kada je $m = n$ pisat ćemo $M_n(\mathbb{F})$.

Definicija 2.1 *Neka su $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ i $B \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{F})$. Kroneckerov produkt matrica A i B definiramo kao*

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{mp\times nq}(\mathbb{F}).$$

Očigledno je Kroneckerov produkt dvije dijagonalne matrice opet dijagonalna matrica. Analogno vrijedi i za donjetrokutaste te gornjetrokutaste matrice.
Navedimo sada jedan primjer Kroneckerovog produkta:

Primjer 2.1 *Neka su zadane sljedeće matrice:* $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ *i* $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$. *Tada je:*

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} B & 3B & 4B \\ 2B & B & 2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 6 & 6 & 8 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 2 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix},$$

$$B \otimes A = \begin{bmatrix} A & A \\ 2A & 2A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 8 & 2 & 6 & 8 \\ 4 & 2 & 4 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Primijetimo da iako su produkti $A \otimes B$ i $B \otimes A$ jednake dimenzije Kroneckerov produkt nije komutativan, odnosno: $A \otimes B \neq B \otimes A$. Zanimljivo je i da je u specijalnim slučajevima produkt dobiven standardnim matričnim množenjem jednak Kroneckerovom produktu, npr. za $x, y \in \mathbb{F}^n$, $xy^T = x \otimes y^T$ i $xy^* = x \otimes y^*$, gdje je y^T transponiran vektor vektora y, a y^* hermitski.
U sljedećim primjerima pogledajmo kako izgleda Kroneckerov produkt proizvoljne matrice sa jediničnom matricom:

Primjer 2.2 *Neka je I_2 jedinična matrica dimenzije 2. Za proizvoljnu matricu $B \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{F})$, $p, q \in \mathbb{N}$ vrijedi:*

$$I_2 \otimes B = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}.$$

Zamjenom matrice I_2 sa I_n, $n > 2$, dobivamo blok dijagonalnu matricu pri čemu se matrica B ponavlja n puta na dijagonali.

Primjer 2.3 *Neka je B proizvoljna matrica dimenzije 2. Tada je:*

$$B \otimes I_2 = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & b_{12} & 0 \\ 0 & b_{11} & 0 & b_{12} \\ b_{21} & 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & b_{21} & 0 & b_{22} \end{bmatrix}.$$

Proširenje na proizvoljnu matricu dimenzije veće od B i I_n, $n > 2$, je ovdje očito.

Spomeniti ćemo još jednu Kroneckerovu operaciju koja je definirana kao uobičajena suma Kroneckerovih produkata.

Definicija 2.2 *Neka je $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ i $B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{F})$. Tada je Kroneckerova suma od A i B, u oznaci $A \oplus B$, matrica $(I_m \otimes A) + (B \otimes I_n)$ dimenzije $mn \times mn$.*

Izborom dimenzije m za prvu jediničnu matricu i dimenzije n za drugu jediničnu matricu osigurali smo da su oba Kroneckerova produkta dimenzije mn te se s toga mogu zbrojiti. Navedimo sada jedan primjer Kroneckerove sume.

Primjer 2.4 *Neka su zadane sljedeće matrice:* $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ *i* $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$*. Tada je:*

$$A \oplus B = (I_2 \otimes A) + (B \otimes I_3) = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 5 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 5 & 0 \\ 4 & 3 & 5 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 & 6 \end{bmatrix},$$

$$B \oplus A = (I_3 \otimes B) + (A \otimes I_2) = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 3 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Primjetimo da u pravilu Kroneckerova suma nije komutativna, odnosno $A \oplus B \neq B \oplus A$. Također, lako se provjeri da za Kroneckerov produkt i Kroneckerovu sumu ne vrijedi svojstvo distributivnosti:

$$(A \oplus B) \otimes C \neq (A \otimes C) \oplus (B \otimes C), \tag{2.1}$$

i

$$A \otimes (B \oplus C) \neq (A \otimes B) \oplus (A \otimes C). \tag{2.2}$$

Na primjer, ukoliko uzmemo matrice $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{F})$, matrica $(A \oplus B) \otimes C$ će biti iz skupa $M_8(\mathbb{F})$, a matrica $(A \otimes C) \oplus (B \otimes C)$ iz skupa $M_{16}(\mathbb{F})$ te stoga vrijedi nejednakost (2.1). Analogno vrijedi za nejednakost (2.2).

2.1 Svojstva

Kako bi vidjeli primjenu Kroneckerovog produkta na rješavanje matričnih jednadžbi napravit ćemo pregled njegovih osnovnih svojstava. Kroneckerov produkt ima neka svojstva kao i konvencionalno matrično množenje, npr. oba produkta su asocijativna i distributivna s obzirom na standardno zbrajanje matrica, dok se razlikuju u rezultatima povezanim sa transponiranjem i inverzom. U sljedećem teoremu navesti ćemo i dokazati nekoliko osnovnih svojstava.

Teorem 2.1 *Neka je $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ i neka je $0_{p\times q}$ nulmatrica dimenzije $p \times q$. Tada vrijede sljedeća svojstva:*

1. $(\alpha A) \otimes B = A \otimes (\alpha B) = \alpha(A \otimes B)$, *za svaki* $\alpha \in \mathbb{F}$ *i* $B \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{F})$
2. $A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C$, *za* $B \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{F})$ *i* $C \in \mathcal{M}_{r\times s}(\mathbb{F})$
3. $A \otimes (B + C) = A \otimes C + A \otimes C$, *za* $B, C \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{F})$
4. $(A + B) \otimes (C) = A \otimes C + B \otimes C$, *za* $B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ *i* $C \in \mathcal{M}_{r\times s}(\mathbb{F})$
5. $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$, *za* $B \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{F})$
6. $(A \otimes B)^* = A^* \otimes B^*$, *za* $B \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{F})$
7. $A \otimes 0_{p\times q} = 0_{p\times q} \otimes A = 0_{mp\times nq}$

Dokaz: Dokaz ovih svojstava se provodi jednostavnom primjenom definicije Kroneckerovog produkta, te osnovnih svojstava matričnog množenja.

1.

$$
\begin{aligned}
(\alpha A) \otimes B &= \left(\alpha \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}\right) \otimes B = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \dots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix} \otimes B \\
&= \begin{bmatrix} \alpha a_{11}B & \dots & \alpha a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1}B & \dots & \alpha a_{mn}B \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix} = \alpha(A \otimes B) \\
&= \begin{bmatrix} \alpha a_{11}B & \dots & \alpha a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1}B & \dots & \alpha a_{mn}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}\alpha B & \dots & a_{1n}\alpha B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\alpha B & \dots & a_{mn}\alpha B \end{bmatrix} = A \otimes (\alpha B)
\end{aligned}
$$

2.

$$
\begin{aligned}
(A \otimes B) \otimes C &= \begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix} \otimes C = \begin{bmatrix} (a_{11}B) \otimes C & \dots & a_{1n}B \otimes C \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{m1}B) \otimes C & \dots & (a_{mn}B) \otimes C \end{bmatrix} \\
&\overset{1.}{=} \begin{bmatrix} a_{11}(B \otimes C) & \dots & a_{1n}(B \otimes C) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}(B \otimes C) & \dots & a_{mn}(B \otimes C) \end{bmatrix} = A \otimes (B \otimes C)
\end{aligned}
$$

3.

$$A \otimes (B+C) = \begin{bmatrix} a_{11}(B+C) & \dots & a_{1n}(B+C) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}(B+C) & \dots & a_{mn}(B+C) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}B + a_{11}C & \dots & a_{1n}B + a_{1n}C \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B + a_{m1}C & \dots & a_{mn}B + a_{mn}C \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11}C & \dots & a_{1n}C \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}C & \dots & a_{mn}C \end{bmatrix} = (A \otimes B) + (A \otimes C)$$

4.

$$(A+B) \otimes C = \left(\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} \right) \otimes C$$
$$= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix} \otimes C = \begin{bmatrix} (a_{11} + b_{11})C & \dots & (a_{1n} + b_{1n})C \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{m1} + b_{m1}) & \dots & (a_{mn} + b_{mn})C \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a_{11}C + b_{11}C & \dots & a_{1n}C + b_{1n}C \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}C + b_{m1}C & \dots & a_{mn}C + b_{mn}C \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a_{11}C & \dots & a_{1n}C \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}C & \dots & a_{mn}C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11}C & \dots & b_{1n}C \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1}C & \dots & b_{mn}C \end{bmatrix}$$
$$= (A \otimes C) + (B \otimes C)$$

5.

$$(A \otimes B)^T = \begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{11}B^T & \dots & a_{m1}B^T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n}B^T & \dots & a_{mn}B^T \end{bmatrix} = A^T \otimes B^T$$

6.

$$(A \otimes B)^* = \begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} \overline{a}_{11}B^* & \dots & \overline{a}_{m1}B^* \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a}_{1n}B^* & \dots & \overline{a}_{mn}B^* \end{bmatrix} = A^* \otimes B^*$$

7.

$$A \otimes 0_{p\times q} = \begin{bmatrix} a_{11}0 & \dots & a_{1n}0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}0 & \dots & a_{mn}0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = 0_{mp\times nq},$$
$$0_{p\times q} \otimes A = \begin{bmatrix} 0A & \dots & 0A \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0A & \dots & 0A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = 0_{mp\times nq}$$

□

Znamo da je u običnom matričnom množenju lako pronaći ne-nul matricu tako da vrijedi $A^2 = 0$, ali kod Kroneckerovog produkta to nije slučaj. U idućem korolaru ćemo to i dokazati.

Korolar 2.1.1 *Neka je $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ i $B \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{F})$. Tada, $A \otimes B = 0_{mp\times nq}$ ako i samo ako je $A = 0_{m\times n}$ ili $B = 0_{p\times q}$.*

Dokaz: $\Longrightarrow$ Pretpostavimo da je $A \otimes B = 0_{mp\times nq}$.
To povlači da je $\begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$. Da bi to bila istina mora vrijediti $B = 0_{p\times q}$ ili $a_{ij} = 0$ za svaki $i = 1, 2, \dots, m$ i $j = 1, 2, \dots, n$. Dakle, ili je $B = 0_{p\times q}$ ili $A = 0_{m\times n}$.

$\Longleftarrow$ Pretpostavimo $A = 0_{m\times n}$ ili $B = 0_{p\times q}$. Tada prema svojstvu 7. iz Teorema (2.1) slijedi $A \otimes B = 0_{mp\times nq}$. □

Idući teorem nazivamo Teorem o mješovitom produktu.

Teorem 2.2 *Neka je $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$, $B \in \mathcal{M}_{r\times s}(\mathbb{F})$, $C \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{F})$ i $D \in \mathcal{M}_{s\times t}(\mathbb{F})$. Tada*

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD \quad (\in \mathcal{M}_{mr\times pt}(\mathbb{F})).$$

Dokaz:

$$\begin{aligned}(A \otimes B)(C \otimes D) &= \begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11}D & \dots & c_{1n}D \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1}D & \dots & c_{np}D \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}c_{k1}BD & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}c_{kp}BD \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{mk}c_{k1}BD & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{mk}c_{kp}BD \end{bmatrix} = AC \otimes BD.\end{aligned}$$

□

Ovo svojstvo ćemo koristiti u dokazivanju idućeg teorema, također koristi se i za dokazivanje da je Kroneckerov produkt dviju normalnih matrica opet normalna matrica te drugih rezultata.

Teorem 2.3 *Ako su $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ i $B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{F})$ nesingularne matrice, tada je $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$.*

Dokaz: Koristeći Teorem 2.2 slijedi:

$$(A \otimes B)(A^{-1} \otimes B^{-1}) = (AA^{-1}) \otimes (BB^{-1}) = I_m \otimes I_n = I_{mn},$$

$$(A^{-1} \otimes B^{-1})(A \otimes B) = (A^{-1}A) \otimes (B^{-1}B) = I_m \otimes I_n = I_{mn}.$$

$\square$

Teorem 2.4 *Ako su $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ i $B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{F})$ normalne, tada je $A \otimes B \in \mathcal{M}_{nm}(\mathbb{F})$ normalna.*

Dokaz: Kako su A i B normalne matrice to je $AA^T = A^T A$ i $BB^T = B^T B$. Koristeći to i rezultate Teorema 2.2 te svojstvo 5. iz Teorema 2.1 slijedi:

$$\begin{aligned}(A \otimes B)^T (A \otimes B) &= (A^T \otimes B^T)(A \otimes B) \\ &= A^T A \otimes B^T B \\ &= AA^T \otimes BB^T \\ &= (A \otimes B)(A \otimes B)^T\end{aligned}$$

$\square$

Teorem 2.5 *Neka je $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ i $B \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{F})$. Tada*

$$A \otimes B = (A \otimes I_p)(I_n \otimes B) = (I_m \otimes B)(A \otimes I_q).$$

Dokaz:

$$\begin{aligned}A \otimes B = &\begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}I_p & a_{12}I_p & \dots & a_{1n}I_p \\ a_{21}I_p & a_{22}I_p & \dots & a_{2n}I_p \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}I_p & a_{m2}I_p & \dots & a_{mn}I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & B \end{bmatrix} \\ &= (A \otimes I_p)(I_n \otimes B).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A \otimes B = &\begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}I_q & a_{12}I_q & \dots & a_{1n}I_q \\ a_{21}I_q & a_{22}I_q & \dots & a_{2n}I_q \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}I_q & a_{m2}I_q & \dots & a_{mn}I_q \end{bmatrix} \\ &= (I_m \otimes B)(A \otimes I_q).\end{aligned}$$

$\square$

Veza između svojstvenih vrijednosti dviju matricu i svojstvenih vrijednosti njihovog Kroneckerovog produkta je zanimljiva, te će nam biti korisna kod dokazivanja svojstava determinante i traga Kroneckerovog produkta. Prisjetimo se, skalar $\lambda \in \mathbb{F}$ nazivamo svojstvena vrijednost kvadratne matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ ako postoji vektor $v \neq 0$ takav da je $Av = \lambda v$. Svaki se takav vektor v zove svojstveni vektor matrice A za svojstvenu vrijednost λ. Spektar matrice A, koji definiramo kao skup svih njezinih svojstvenih vrijednosti, označavamo sa $\sigma(A)$.

Teorem 2.6 *Neka $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ ima svojstvene vrijednosti $\lambda_i, i = 1, 2, \ldots, n$, i neka $B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{F})$ ima svojstvene vrijednosti $\mu_j, j = 1, 2, \ldots, m$. Tada Kroneckerov produkt $A \otimes B$ ima mn svojstvenih vrijednosti*

$$\lambda_1\mu_1, \ldots, \lambda_1\mu_m, \lambda_2\mu_1, \ldots, \lambda_2\mu_m, \ldots, \lambda_n\mu_1, \ldots, \lambda_n\mu_m.$$

Nadalje, ako su $x_1, \ldots, x_p$ linearno nezavisni desni svojstveni vektori matrice A za odgovarajuće $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ $(p \leq n)$, te $z_1, \ldots, z_q$ linearno nezavisni desni svojstveni vektori matrice B za odgovarajuće $\mu_1, \ldots, \mu_q$ $(q \leq m)$, tada su $x_i \otimes z_j \in \mathbb{F}^{mn}$ linearno nezavisni desni svojstveni vektori od $A \otimes B$ za odgovarajuće $\lambda_i\mu_j, i \in \{1, \ldots, p\}, j \in \{1, \ldots, q\}$.

Dokaz: Neka je $Ax = \lambda x$ i $Bz = \mu z$ za $x, z \neq 0$. Koristeći Teorem (2.2) i svojstvo 1. Teorema (2.1) slijedi:

$$\begin{aligned}(A \otimes B)(x \otimes z) &= (Ax) \otimes (Bz) \\ &= (\lambda x) \otimes (\mu z) \\ &= \lambda\mu(x \otimes z).\end{aligned}$$

Dakle, $\lambda\mu$ je svojstvena vrijednost matrice $A \otimes B$ sa odgovarajućim svojstvenim vektorom $x \otimes z$. □

Propozicija 2.1 *Neka je $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ i $B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{F})$. Skupovi svojstvenih vrijednosti od $A \otimes B$ i $B \otimes A$ su jednaki.*

Dokaz: Vidi [3, str. 245] □

Korolar 2.6.1 *Neka je $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ i $B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{F})$. Tada*

1. $det(A \otimes B) = (detA)^m(detB)^n = det(B \otimes A)$
2. $tr(A \otimes B) = (trA)(trB) = tr(B \otimes A)$

Dokaz:

1. Determinanta matrice jednaka je produktu svojih svojstvenih vrijednosti te stoga imamo da je $det(A \otimes B) = \prod_{i=1}^{mn} \lambda_i$, gdje su λ_i svojstvene vrijednosti Kroneckerovog produkta $A \otimes B$. Prema Teoremu 2.6, svaki $\lambda_i = \alpha_j\beta_k$, gdje je α_j svojstvena vrijednost od A i β_k svojstvena vrijednosti od B. Tada je

$$det(A \otimes B) = \prod_{i=1}^{mn} \lambda_i = \prod_{j=1}^{n}\prod_{k=1}^{m}(\alpha_j\beta_k) = (\prod_{j=1}^{n} {\alpha_j}^m)(\prod_{k=1}^{m} {\beta_k}^n) = (detA)^m(detB)^n.$$

Kako su svojstvene vrijednosti od $(A \otimes B)$ i $(B \otimes A)$ jednake, slijedi $det(A \otimes B) = det(B \otimes A)$.

2. Trag matrice je jednak sumi svojstvenih vrijednosti matrice. Ako su svojstvene vrijednosti matrice A jednake α_i, za $i = 1, 2, \ldots, n$ i svojstvene vrijednosti od B jednake β_j, za $j = 1, 2, \ldots, m$, tada je

$$tr(A \otimes B) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (\alpha_i \beta_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{m} \beta_j = tr(A)tr(B).$$

Slijedi, $tr(A \otimes B) = tr(A)tr(B) = tr(B)tr(A) = tr(B \otimes A)$. □

Analogno, možemo izvesti rezultat za svojstvene vrijednosti Kroneckerove sume.

Teorem 2.7 *Neka $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ ima svojstvene vrijednosti $\lambda_i, i = 1, 2, \ldots, n$, i neka $B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{F})$ ima svojstvene vrijednosti $\mu_j, j = 1, 2, \ldots, m$. Tada Kroneckerova suma $A \oplus B = (I_m \otimes A) + (B \otimes I_n)$ ima mn svojstvenih vrijednosti*

$$\lambda_1 + \mu_1, \ldots, \lambda_1 + \mu_m, \lambda_2 + \mu_1, \ldots, \lambda_2 + \mu_m, \ldots, \lambda_n + \mu_1, \ldots, \lambda_n + \mu_m.$$

Nadalje, ako su $x_1, \ldots, x_p$ linearno nezavisni desni svojstveni vektori matrice A za odgovarajuće $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ $(p \leq n)$, te $z_1, \ldots, z_q$ linearno nezavisni desni svojstveni vektori matrice B za odgovarajuće $\mu_1, \ldots, \mu_q$ $(q \leq m)$, tada su $z_j \otimes x_i \in \mathbb{F}^{mn}$ linearno nezavisni desni svojstveni vektori od $A \oplus B$ za odgovarajuće $\lambda_i + \mu_j, i \in \{1, \ldots, p\}, j \in \{1, \ldots, q\}$.

Dokaz: Neka je $Ax = \lambda x$ i $Bz = \mu z$ za $x, z \neq 0$. Koristeći definiciju Kroneckerove sume, Teorem (2.2) i svojstvo 1. Teorema (2.1) slijedi:

$$\begin{aligned}
(A \oplus B)(z \otimes x) &= [(I_m \otimes A) + (B \otimes I_n)](z \otimes x) \\
&= (I_m \otimes A)(z \otimes x) + (B \otimes I_n)(z \otimes x) \\
&= (I_m z \otimes Ax) + (Bz \otimes I_n x) \\
&= (z \otimes \lambda x) + (\mu z \otimes x) \\
&= (\lambda + \mu)(z \otimes x)
\end{aligned}$$

□

3 Operator vektorizacije

Vektorizacija matrice je linearna transformacija koja pretvara matricu u vektor stupac. Princip rada operatora vektorizacije je prilično jednostavan, on svrstava sve stupce matrice jedan ispod drugog. Ovaj operator se može primijeniti na matrice bilo kojeg reda.

Definicija 3.1 *Neka $c_i \in \mathbb{F}^n$, $i = 1, \dots, m$, označava stupce od $C \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{F})$ tako da je $C = [c_1, \dots, c_m]$. Tada je sa $vec(C)$ označen mn-vektor formiran slaganjem stupaca matrice C jedan ispod drugoga, odnosno $vec(C) = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}$.*

Pogledajmo ovu definiciju na jednostavnom primjeru.

Primjer 3.1 *Neka je zadana matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Tada je:*

$$vec(A) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

3.1 Svojstva

Navest ćemo i dokazati neka osnovna svojstva operatora vektorizacije.

Teorem 3.1 *Neka su $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$, i neka je $a \in \mathbb{F}^n$. Tada vrijede sljedeća svojstva:*

1. $vec(A + B) = vec(A) + vec(B)$,
2. $vec(\alpha A) = \alpha vec(A)$,
3. $vec(a^T) = vec(a) = a$.

Dokaz:

1.

$$vec(A+B) = vec\left(\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} \\ \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} \\ \vdots \\ a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \\ \vdots \\ a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{m1} \\ \vdots \\ b_{1n} \\ \vdots \\ b_{mn} \end{bmatrix} = vec(A) + vec(B)$$

2.

$$vec(\alpha A) = vec\left(\begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \dots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} \\ \vdots \\ \alpha a_{m1} \\ \vdots \\ \alpha a_{1n} \\ \vdots \\ \alpha a_{mn} \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \\ \vdots \\ a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \alpha vec(A)$$

3.

$$vec(a^T) = vec(\begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = vec(a) = a$$

□

Pogledajmo sada povezanost Kroneckerovog produkta i operatora vektorizacije.

Teorem 3.2 *Neka je* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F}), B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{F})$ *i* $C \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{F})$. *Tada vrijede sljedeća svojstva:*

1. $(I_p \otimes A)vec(B) = vec(AB)$,

2. $(A \otimes I_p)vec(C) = vec(CA^T)$.

Dokaz:

1. Neka je $(B)_i$ i-ti stupac matrice B.

$$(I_p \otimes A)vec(B) = \begin{bmatrix} A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (B)_1 \\ (B)_2 \\ \vdots \\ (B)_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(B)_1 \\ A(B)_2 \\ \vdots \\ A(B)_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (AB)_1 \\ (AB)_2 \\ \vdots \\ (AB)_p \end{bmatrix} = vec(AB).$$

2. Neka je $(C)_i$ i-ti stupac matrice C.

$$(A \otimes I_p)vec(C) = \begin{bmatrix} a_{11}I_p & a_{12}I_p & \dots & a_{1n}I_p \\ a_{21}I_p & a_{22}I_p & \dots & a_{2n}I_p \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}I_p & a_{m2}I_p & \dots & a_{mn}I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (C)_1 \\ (C)_2 \\ \vdots \\ (C)_n \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} a_{11}(C)_1 + a_{12}(C)_2 + \ldots + a_{1n}(C)_n \\ a_{21}(C)_1 + a_{22}(C)_2 + \ldots + a_{2n}(C)_n \\ \vdots \\ a_{m1}(C)_1 + a_{m2}(C)_2 + \ldots + a_{mn}(C)_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C(A^T)_1 \\ C(A^T)_2 \\ \vdots \\ C(A^T)_m \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (CA^T)_1 \\ (CA^T)_2 \\ \vdots \\ (CA^T)_m \end{bmatrix} = vec(CA^T).
\end{aligned}
$$

□

Iduću lemu je 1934. godine izveo W.E.Roth, te ju je stoga 1975. godine Hartwig nazvao Rothova stupac lema.

Lema 3.1 *Neka je* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F}), B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{F})$ *i* $C \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{F})$. *Tada je*

$$vec(ABC) = (C^T \otimes A)vec(B).$$

Dokaz: Prema Teoremu 3.2 i Teoremu 2.5 slijedi:

$$
\begin{aligned}
vec(ABC) &= vec((AB)C) \\
&= (C^T \otimes I_m)vec(AB) \\
&= (C^T \otimes I_m)(I_p \otimes A)vec(B) \\
&= [(C^T \otimes I_m)(I_p \otimes A)]vec(B) \\
&= (C^T \otimes A)vec(B).
\end{aligned}
$$

□

4 Primjena na rješavanje matričnih jednadžbi

Kroneckerov produkt i operator vektorizacije se mogu primjeniti u rješavanju linearnih jednadžbi gdje su nepoznanice matrice. Primjer takve jednadžbe je Sylvesterova jednadžba

$$AX + XB = C, \tag{4.1}$$

gdje za dane $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F}), B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{F})$ i $C \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{F})$ želimo pronaći sve $X \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{F})$ koje zadovoljavaju danu jednadžbu. Jednadžbu (4.1) možemo pretvoriti u ekvivalentan sustav jednadžbi, gdje matrica koeficijenata sadrži Kroneckerov produkt. Naime, ukoliko zapišemo matrice pomoću njihovih stupaca, izjednačavanjem i-tih stupaca vidimo da je

$$Ax_i + Xb_i = c_i = Ax_i + \sum_{j=1}^{m} b_{ji}x_j,$$

odnosno imamo sljedeći linearan sustav

$$\begin{bmatrix} A + b_{11}I & b_{21}I & \dots & b_{m1}I \\ b_{12}I & A + b_{22}I & \dots & b_{m2}I \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{1m}I & b_{2m}I & \dots & A + b_{mm}I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}. \tag{4.2}$$

Matricu koeficijenata u (4.2) možemo zapisati kao Kroneckerovu sumu $(I_m \otimes A) + (B^T \otimes I_n)$, te koristeći Definiciju 3.1 dobivamo sljedeći linearan sustav

$$[(I_m \otimes A) + (B^T \otimes I_n)]vec(X) = vec(C). \tag{4.3}$$

Idući teorem nam daje odgovor na pitanje kada postoji rješenje jednadžbe (4.1). U tome će nam biti korisne svojstvene vrijednosti Kroneckerove sume. Naime, jednadžba (4.3) ima jedinstveno rješenje ako i samo ako je $[(I_m \otimes A) + (B^T \otimes I_n)]$ nesingularna, odnosno ako i samo ako nula nije svojstvena vrijednost ove Kroneckerove sume. Prema Teoremu 2.7 svojstvene vrijednosti od $[(I_m \otimes A) + (B^T \otimes I_n)]$ su $\lambda_i + \mu_j$, gdje je $\lambda_i \in \sigma(A), i \in \{1, \dots, n\}$, i $\mu_j \in \sigma(B), j \in \{1, \dots, m\}$.

Teorem 4.1 *Neka je $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F}), B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{F})$ i $C \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{F})$. Tada Sylvesterova jednadžba*

$$AX + XB = C$$

ima jedinstveno rješenje ako i samo ako A i $-B$ nemaju zajedničkih svojstvenih vrijednosti.

Dokaz: Vidi [3, str. 70] $\square$

Ukoliko u jednadžbu (4.1) stavimo da je $B = A^T$ dobivamo

$$AX + XA^T = C. \tag{4.4}$$

To je poseban slučaj Sylvesterove jednadžbe koju nazivamo Lyapunova jednadžba. Pomoću operatora vektorizacije ju možemo zapisati u ekvivalentnom obliku:

$$[(I \otimes A) + (A \otimes I)]vec(X) = vec(C).$$

Teorem 4.2 *Neka je $A, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Tada Lyapunova jednadžba*

$$AX + XA^T = C$$

ima jedinstveno rješenje ako i samo ako A i $-A^T$ nemaju zajedničkih svojstvenih vrijednosti. Ukoliko je C simetrična matrica i jednadžba ima jedinstveno rješenje, tada je to rješenje simetrična matrica.

Dokaz: Vidi [3, str. 70] $\square$

Pogledajmo još jednadžbu

$$AXB = C.$$

Prema Teoremu 3.1 vidimo da ju ekvivalentno možemo zapisati kao

$$(B^T \otimes A)vec(X) = vec(C).$$

Idući teorem govori o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja ove jednadžbe.

Teorem 4.3 *Neka su $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Matrična jednadžba AXB=C ima jedinstveno rješenje $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ za svaki dani C ako i samo ako su i A i B nesingularne. Ukoliko je jedna od matrica A ili B singularna, tada postoji rješenje $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ ako i samo ako je $r(B^T \otimes A) = r([B^T \otimes A \quad vec(C)])$.*

Dokaz: Vidi [1, str. 30] $\square$

Na sljedećem primjeru vidimo kako rješavamo matrične jednadžbe $AXB = C$ pomoću Kroneckerovog produkta.

Primjer 4.1 *Neka su zadane matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 29 & 20 \\ 22 & 15 \end{bmatrix}$, te neka je $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$ nepoznata matrica. Zapisivanjem jednadžbe $AXB = C$ u ekvivalentnom obliku $(B^T \otimes A)vec(X) = vec(C)$ imamo*

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ 22 \\ 20 \\ 15 \end{bmatrix}.$$

Odnosno, dobili smo sustav od četiri linearne jednadžbe sa četiri nepoznanice

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 &= 29 \\
x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 22 \\
x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 &= 20 \\
x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 15
\end{aligned}$$

Rješavanjem sustava dobivamo

$$X = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Dakle, Kroneckerov produkt je koristan način množenja matrica, a jedna od mnogih primjena Kroneckerovog produkta je određivanje rješenja linearnih matričnih jednadžbi. Matrične jednadžbe se zapišu u ekvivalentan sustav linearnih jednadžbi gdje se matrica koeficijenata dobiva korištenjem Kroneckerovog produkta. Ova transformacija je ostvarena pomoću operatora vektorizacije.

Literatura

[1] B.J. Broxson. *The Kronecker Product*. University of North Florida, Florida, 2006.

[2] H.V. Henderson. *The vec-permutation matrix, the vec operator and Kronecker products: A Review*. Linear and Multilinear Algebra, 9 (1981), str. 271-288.

[3] R.A. Horn and C.R. Johnson. *Topics in Matrix Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 2013.

[4] A.J. Laub. *Matrix Analysis for Scientists and Engineers*. SIAM, Davis, 2005.

[5] C.F. Van Loan. *The ubiquitous Kronecker product*. Journal of Computational Applied Mathematics, 123 (2000), str. 85-100.

[6] P.A. Regalia and M.K. Sanjit. *Kronecker Products, Unitary Matrices and Signal Processing Applications*. SIAM Review, 31 (1989), str. 586-613.

[7] H. Zhang and F. Ding. *On the Kronecker Products and Their Applications*. Jiangnan University, Wuxi, 2013.
Dostupno na: `https://www.hindawi.com/journals/jam/2013/296185/`